

KAARDI MATEMAATILINE ALUS

Kaardi matemaatiline alus kirjeldab, kuidas kaart esitab reaalse ruumi suhteid. Selleks tuleb ära määrata rida suurusi nagu:

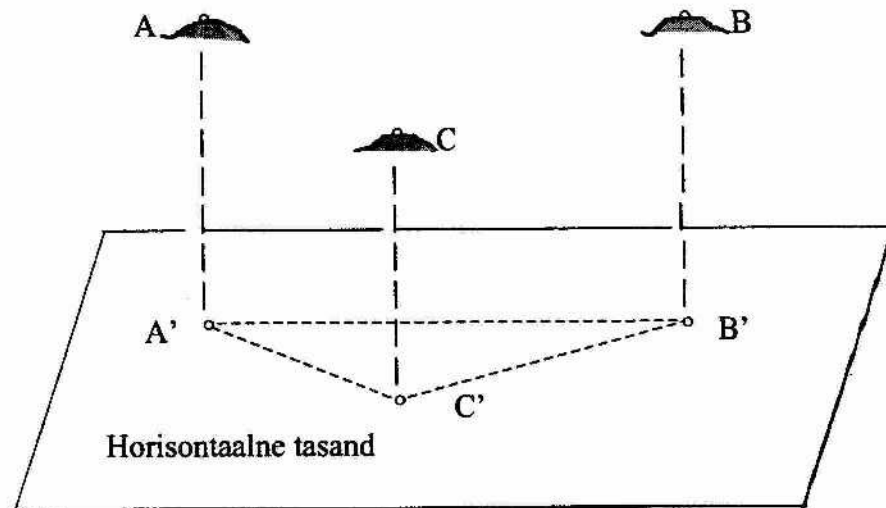
- **geodeetiline alus** - maaellipsoid, geodeetiliste koordinaatide süsteem, koordinaatide süsteemi tsentreerimise lähtepunkt ja orienteerimine;
- **mõõtühikud** - pikkusühikud ja nurgühikud, mida kasutatakse kaardi koordinaatide arvutamisel.
- **kaardiprojektsioon** - eeskiri, mille abil sfääriline pind esitatakse tasapinnalisena;
- **tasapinnalised koordinaadid** - tavaliselt tasapinnalised ristkoordinaadid, nn kaardikoordinaadid. Nendes koordinaatides salvestatakse kõik kaardi objektid ja elemendid;
- **mõõtkava** - kaardil mõõdetud suuruse suhe tegelikkuses olevasse suurusesse;
- **kaardijagu ja nomenklatuur** - süsteem, mis jaotab suurema kaardistatud territooriumi kindlal viisil üksikute kaardilehtede vahel ära ning annab lehtedele tähistuse; kaardinomenklatuuri eesmärgiks on hõlbustada vajalike kaardilehtede leidmist;
- **kaardiraam** - kaarti piirav vormikohane joonestik, mille matemaatiliseks tähenduseks on kaardi koordinaatvälja piiramine; vormiliselt kasutatakse kaardiraami ka koordinaatide tähistamiseks.

KAARDIPROJEKTSIOONID

ORTOGONAALPROJEKTSIOON

Ortogonaalprojektsioon on kõige lihtsam kaardiprojektsioon, kuna see ei arvesta maakera kumerust, mistõttu seda kasutatakse ainult väiksemate maa-alade kaardistamiseks ehk **maa-alade plaanide koostamiseks**. Kuni 10 km raadiuses mingisuguse lähtepunkti ümber võib maakera kumera pinna asendada horisontaalse tasandiga, millele projekteeritakse kõik vaadeldaval alal olevad punktid paralleelsete kiirte abil. Sellisel plaanil (kaardil) on mõõtkava kogu ulatuses konstantne ja puuduvad moonutused.

Et maa-ala plaani koostada horisontaalprojektsioonis, tuleb kõikidele maastikul mõõdetud kaldjoontele arvutada horisontaalprojektsiooni pikkus.



KARTOGRAAFILISED PROJEKTSIOONID

Maa on ruumiline objekt. Paber ja arvutiekraan on tasapinnalised. Maakera pinna ehk maa pöördellipsoidi matemaatilisi kujutamise viise tasapinnal nimetatakse **kartograafilisteks projektsioonideks**.

Maa pinnal olevate objektide kujutamiseks tasandil kasutatakse **siirdepindu** (tasand, silinder, koonus), mis puudutavad või lõikavad maaellipsoidi vaadeldaval alal ning millele objektid projekteeritakse siirdepinnale. Peale projekteerimist keeratakse siirdepind lahti ja nii ongi saadud kaart või tasand, millele on lihtne ristkoordinaate moodustada.

Et ma füüsiline pind on ebatasane, siis topograafilise kaardi saamiseks on vajalik projekteerida kõigepealt geodeetilise põhivõrgu punktid (koordineeritud kindelpunktid) maaellipsoidi pinnale. Seejärel valitakse projektsiooni abipind ehk siirdepind, millele kantakse üle maaellipsoidilt **kaardivõrk** (meridiaanid ja paralleelid) ja geodeetilise põhivõrgu punktid ning seejärel nende suhtes määratud maastiku objektid ja kontuurid.

Kaardiprojektsioonid toovad endaga kaasa **moonutusi**, mis võivad olla väga erineva iseloomuga. Moonutuste laadilt eristatakse projektsioone järgmiselt:

Konformsed projektsioonid – õigenurksed projektsioonid, kujutise mõõtkava on mingist punktis kaardil sama kõigis suundades. Sellest tulenevalt lõikuvad paralleelid ja meridiaanid täisnurga all (see ei tähenda, et nad sirged oleksid) ning objektide kuju ei moonutata. Säilib lõpmata väikeste kujundite sarnasus ja pikkuste mõõtkavad punktis ei olene joone suunast.

Ekvivalentsed projektsioonid - õigepindsed projektsioonid, kus pindalade suhe kaardil võrdub vastavate pindalade suhtega maaellipsoidil.

Konventsionaalsed projektsioonid – sobedad projektsioonid, kus moonutuvad nii pikkused, pindalad kui nurgad, kuid näiteks pindalad moonutuvad vähem kui konformsetes projektsioonides ja nurgad ning pikkuste mõõtkavad moonutuvad vähem kui ekvivaletsetes projektsioonides. Siia alla kuuluvad ka:

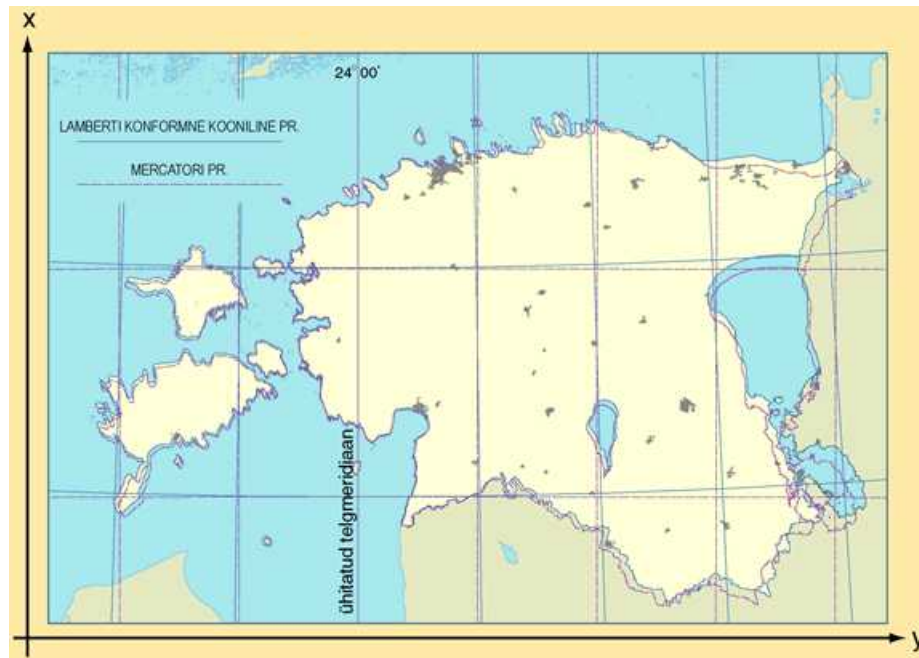
Ekvidistantsed projektsioonid – õigepikkuselised. Projektsioon on pikkusmoonutusteta kui projektsiooni keskpunktist suvalisse punkti kaardil tõmmatud jooned on õige pikkusega. Mõõtkava on ühel peasuunal konstantne.

Õigenurksed projektsioonid – projektsioon ei põhjusta suunamooneid, kui asimuudid jäävad õigeks kõikides suundades.

Õigemõõtkavalised projektsioonid – projektsioon on mõõtkavamooneideta, kui joonmõõtkava säilib kõigis kaardi punktides.

Projektsioonidest tulenevad moonutused jäetakse arvestamata ainult väikest ala kaardistades. Üle 100 km² piirkonna kaardistamisel tuleb aga juba koordinaatsüsteemidele ja projektsioonidele tähelepanu pöörata.

Eesti kaardi puhul ilmneb projektsioonidest tulev moonutus eelkõige arvutustes, inimsilm märkab erinevust siis, kui kaks kaarti kokku panna. Euroopa ja maailma kaardi puhul näeb projektsioonide erinevust ka treenimata silmaga.



Moonutustest tulenevalt eristatakse väikesemõõtkavaliste kaartide korral peamõõtkava ja erimõõtkava

Peamõõtkava on mõõtkava, mis kehtib maaellipsoidi ja projektsiooni siirdepinna lõike- või puutekohas, st kaardi mõõtkava moonutusteta punktis või –joontel. Teistes kaarti punktides on **erimõõtkava** st mõõtkava on peamõõtkavast kas suurem või väiksem. Sõltuvalt projektsioonist ja kaugusest nullmoonutusega kohast võivad erimõõtkava ja peamõõtkava erineda mitmekordselt.

Joonte moonutuse leidmiseks võrreldakse mingi joonlõigu pikkust keral antud lõigu pikkusega projektsiooni tasandil. Saadud suhe on **mõõtkava tegur**.

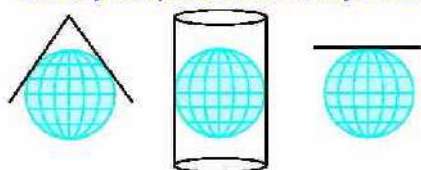
Pindala moonutuse leidmiseks võrreldakse mingi ala pindala keral ja projektsiooni tasandil. Nende suhe on pindala **mõõtkava tegur**.

Siirdepinna kuju järgi eristatakse **tasandilisi** ehk asimutaalseid, **silindrilisi** ja **koonilisi** kartograafilisi projektsioone.

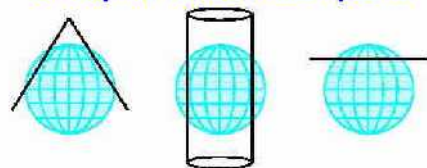


Siirdepinnad kas **puutuvad** maellipsoidi või **lõikavad** seda. Siirdepindade lõikumisega on võimalik moonutusi vähendada.

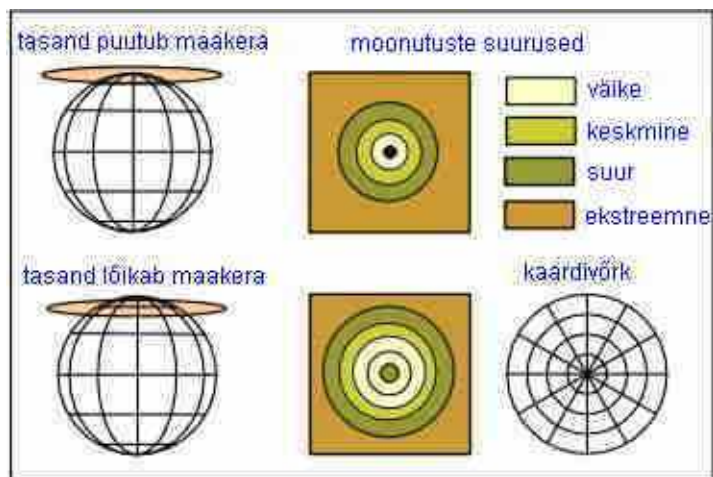
Siirdepind puutub maellipsoidi



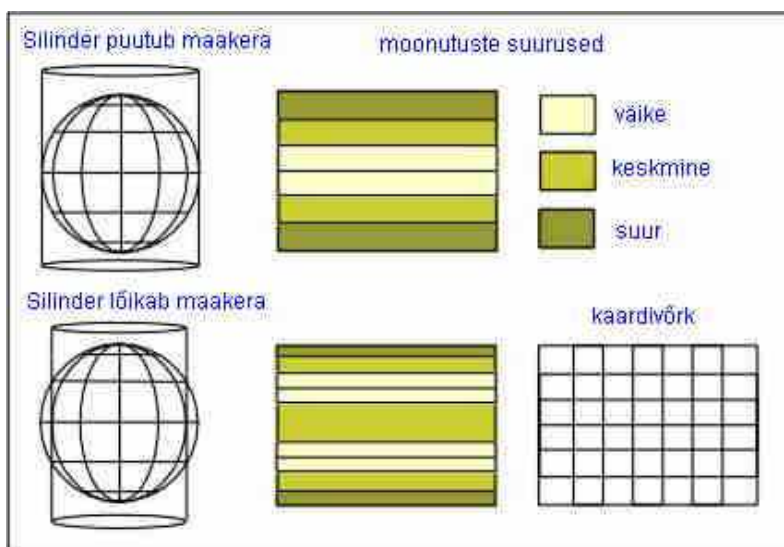
Siirdepind lõikab maellipsoidi



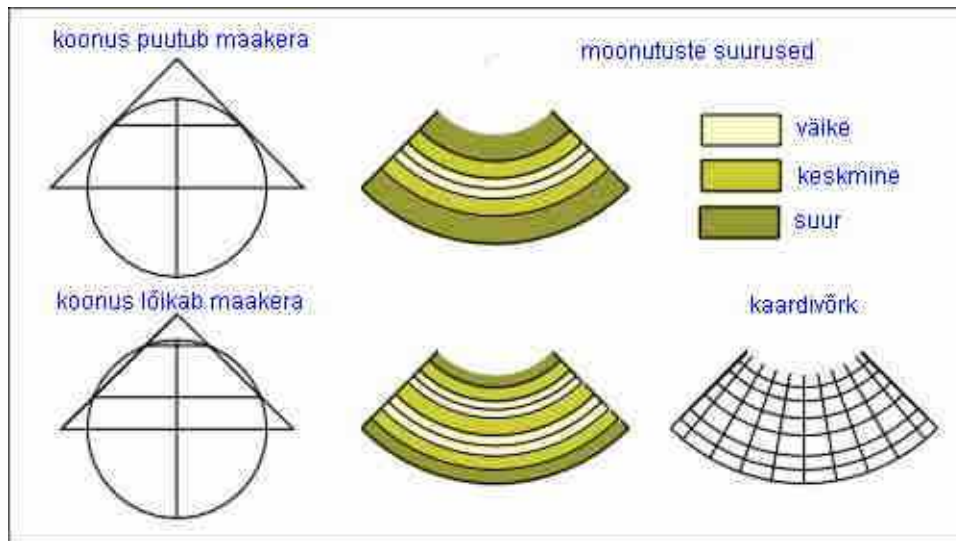
Näide moonutustest **tasandiliste projektsioonide** korral:



Näide moonutustest **silindriliste projektsioonide** korral:

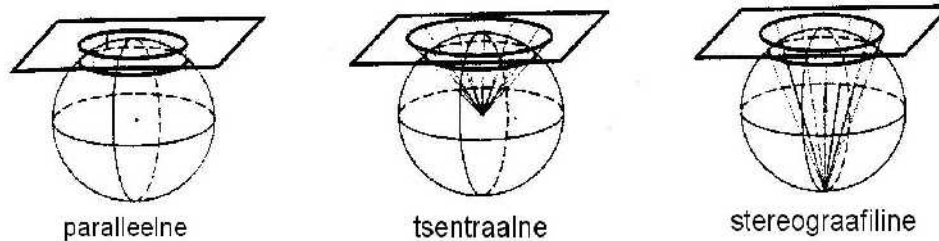


Näide moonutustest **kooniliste projektsioonide** korral



Kui projektsiooni tsentri asend jääb muutumatuks kogu kaardistatava ala ülekandmisel projektsiooni pinnale, siis nimetatakse projektsiooni **perspektiivseks**.

Sõltuvalt projektsiooni tsentri asukohast eristatakse **paralleelseid** (silmapunkt asub lõpmatuses, projekteerivad kiired on paralleelsed), **tsentraalseid** (silmapunkt asub maakera keskpunktis) ja **stereograafilisi** (silmapunkt asub maakera vastaspoolel) projektsioone.



Tasandilised projektsioonid

Siirdepinna asendi järgi võivad tasandilised projektsioonid olla **normaalsed (polaarsed)**, **horisontaalsed (kald-)** või **ekvaatoriaalsed**.



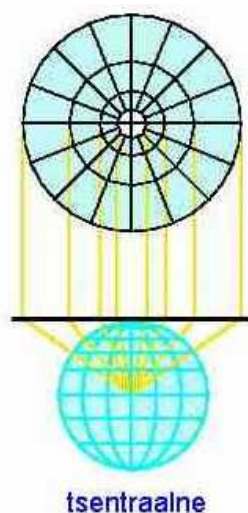
Tasandilistes projektsioonides ei saa ühel kaardil kujutada kogu maallipsoidi. Need projektsioonid sobivad ümara piirkonna kujutamiseks. Tihti kasutatakse tasandilist normaalset projektsiooni

poolust ümbritsevate alade kaardistamisel. Tasandilist kaldprojektsiooni kasutatakse keskmistel laiuskraadidel ja põikprojektsiooni ekvatoriaalpiirkondades enamasti väiksemates mõõtkavades.

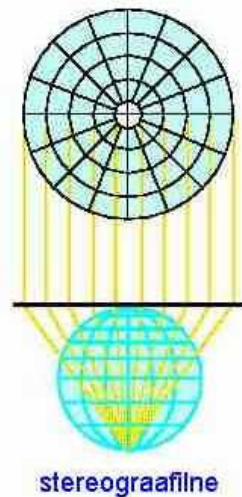


Kui siirdepinnaks on **tasand**, ja projektsioon on **normaalne (polaarne)**, siis meridiaanid on kaardil kujutatud poolusest väljuvate kiirtena. Paralleelid on kaardil kujutatud kontsentriliste ringidena.

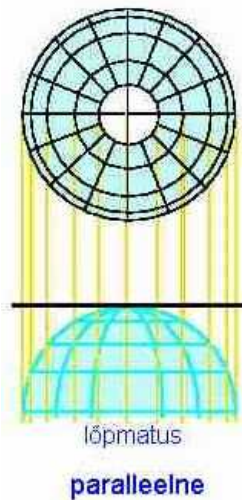
Tsentraalse tasandilise projektsiooni korral asub projektsiooni keskpunkt maakera keskpunktis. Ekvaatori kujutis kaardil asub lõpmatuses. Kujutise mõõtkava ja moonutused kasvavad poolusest eemaldumisel. Selliselt projekteeritud kaardi keskosa on korrektne, kuid äärealad on väga väljavenitatud. Projektsiooni kasutatakse polaaraladel ja merede ülevaatekaartidel.



Stereograafilise projektsiooni korral asub siirdepind põhjapoolusel ja projektsiooni tsepter lõunapoolusel või vastupidi. Pooluse kujutis langeb ühte tasandi tsentriga. Ekvaatori kujutiseks on ringjoon. Kujutise mõõtkava kasvab poolusest eemaldumisel ja mõõtkava on ekvaatoril kaks korda suurem kui poolusel. Selline projektsioon on konformne (õigenurkne), kuid mõõtkava moonutus äärealadel on liialt suur, ning seetõttu ei saa seda projektsiooni kasutada topograafiliste kaartide tegemisel.

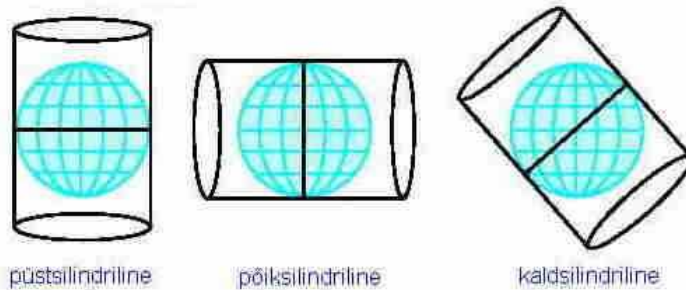


Paralleelse tasandilise projektsiooni korral asub silmapunkt ehk projektsiooni tšenter lõpmatuses. Seda projektsiooni kutsutakse ka **ortograafiliseks projektsiooniks**. Kujutise moodustavad kiired on paralleelsed. Poolus langeb ühte maakera keskpunktiga. Selle projektsiooni korral on kaardi keskpäik kujutatud korrektselt või väikeste moonutustega, kuid moonutused suurenevad tšentrist eemaldudes ja äärepoolne ala on järjest rohkem kokkusurutud ning kaarti pole võimalik äärealadelt lugeda. Projektsiooni kasutatakse väikesemõõtkavaliste, peamiselt astronoomiliste kaartide tegemiseks.



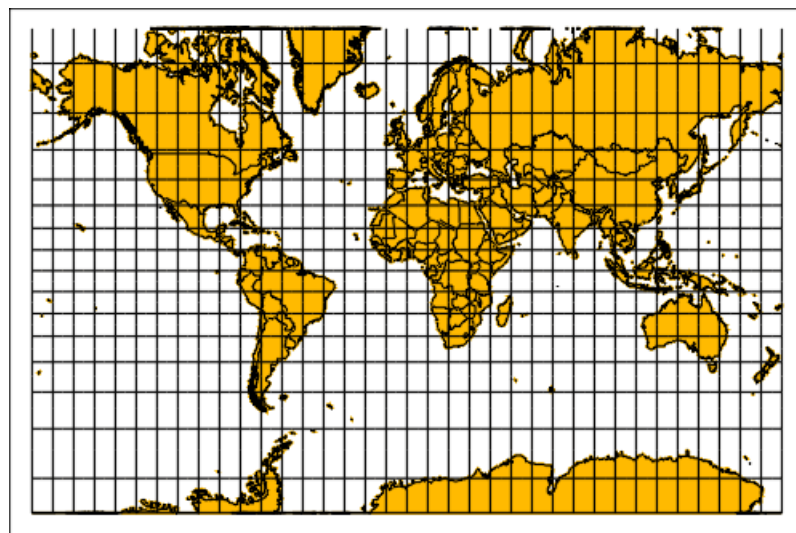
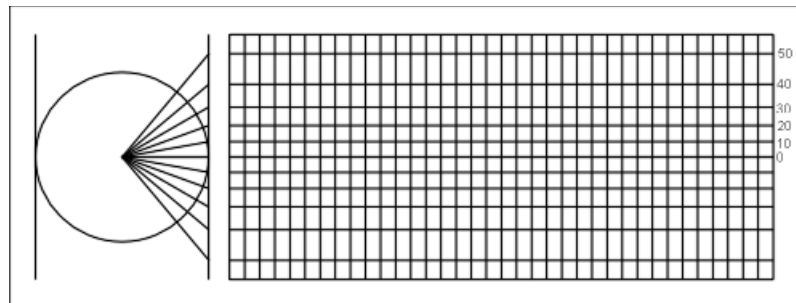
Silindrilised projektsioonid

Silindrilised projektsioonid võivad olla **normaalsed (püst-), kald- või põiksilindrilised**.



Silindrilisi projektsioone kasutatakse laialdaselt kogu maaellipsoidi kaardistamiseks, nii suure kui väikesemõõtkavaliste kaartide koostamisel. Enamlevinud on püst- ja põiksilindriline ehk transversaalne projektsioon.

Püstsilindrilist projektsiooni nimetatakse Mercatori projektsiooniks, millele Flaami matemaatik, geograaf ja kartograaf Gerardus Mercator pani aluse 1569. aastal. Siirdepinnana kasutatakse püstsilindrit, mille telg ühtib maakera pöörlemisteljega. Maakera on asetatud silindrisse, mis puudutab kera mööda ekvaatorit. Projektsiooni tsepter asub maakera keskpunktis (tsentraalse projektsioon). Ekvaatori ja selle lähedal olevad alad saab kaardil kujutada moonutusteta. Kaugenedes ekvaatorist pooluste suunas, moonutused suurenevad ja pooluse läheduses olevad alad on siiratud lõpmatusse ning need ei projekteerugi silindri pinnale.

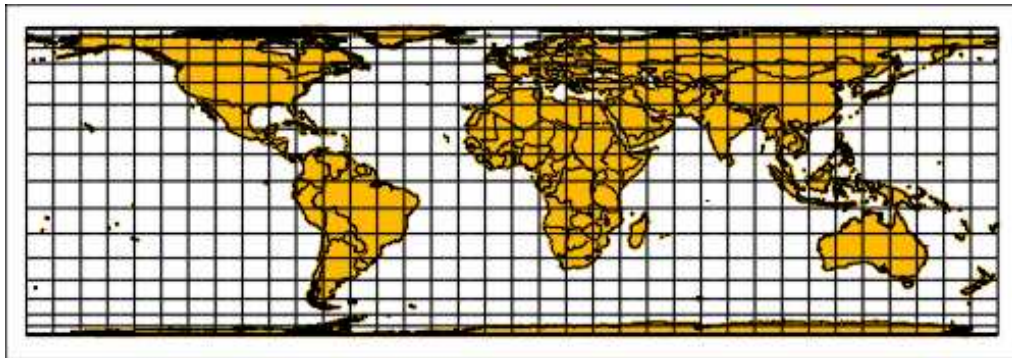


Mercatori projektsioon on **konformne ehk õigenurkne**. Et säilitada konformsust, tuleb meridiaanid välja venitada ehk võrdsete geograafiliste laiuste vahedega paralleelide vahekaugusi kaardil pidevalt

suurendada. Silindri laotamisel tasandile näeme, et meridiaanid on kujutatud vertikaalsete sirgetena ja paralleelid on nendega risti. Meridiaanide vahekaugused on kogu kaardi ulatuses samad ehk võrdsed geograafiliste pikkuste vahedega maaellipsoidil.

Kuna mõõtkava moonutused on väikesed ekvaatori lähedal, kasutatakse Mercatori projektsiooni ekvatoriaalvööndi kaardistamistel ja navigatsioonil. Puutujasilindriga projektsioone kasutatakse väikesemõõtkavalistel kaartidel, lõikajasilindriga projektsioone kesk- ja suuremõõtkavalistel kaartidel. Puutujasilindriga Mercatori projektsiooni võib kasutada ekvatoriaalvööndis ka keskmistes ja suurtes mõõtkavades.

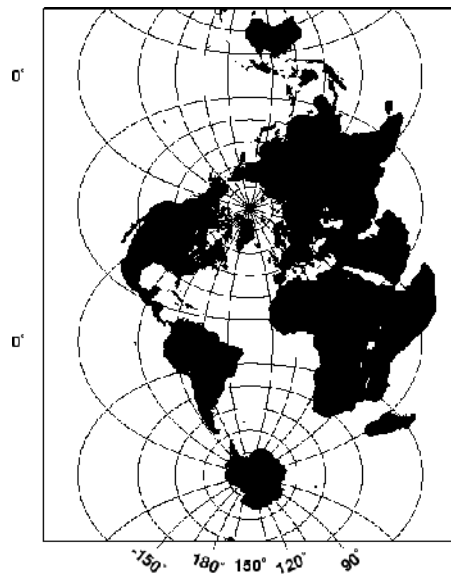
Püstsilindriline **ortograafilise projektsiooni** korral asub projektsiooni tšenter lõpmatuses ja kujutised projekteeruvad paralleelsete kiirte abil. Ekvaatorist kaugenedes paralleelide vahekaugused vähenevad (vastupidiselt tsentraalprojektsioonile). Kaardi põhja- ja lõunapoolsete alade kokkusurutus on võrdeline ida- ja läänepoolsete alade väljavenitatuslega.



Põiksilindrilise projektsiooni ehk TM projektsioon (Transverse Mercator). Selles projektsioonis saab edukalt kaardistada kogu maailma. Põiksilindriline projektsiooni korral puutub silinder maaellipsoidi mööda meridiaani ja silindri telg ühtib maaellipsoidi ekvaatoritasandiga. Sellisel juhul võetakse puutemeridiaan projektsiooni x-teljeks. Mõõtkava x-teljel on võrdne ühega.

Laialt on levinud ka projektsioon lõikajasilindriga, mis lõikab maaellipsoidi kahest kohast. Sel juhul on projektsiooni telgmeridiaanil ehk x-teljel mõõtkava tihti ühest erinev (enamasti 0.9996).

TM projektsioonis koostatud kaardil on telgmeridiaan ja kujutatud sirgjoontena. Teised paralleelid ja meridiaanid on kõverjoonelised. Moonutused on väikseimad telgmeridiaanil ja suurenevad sellest kaugenemisel.



TM projektsioonis võib kaardistada kogu maakera, kasutatakse seda enim väikesemõõtkavaliste kaartide puhul (nt 1:5 000 000). Samuti on selles projektsioon kaardistatud paljude riikide kaardid, ka Eesti baaskaart. Suuremas mõõtkavas (1:500 000) kasutatakse põiksilindrilist projektsiooni pooluselähedastel aladel (pp või pl $>85^\circ$). TM projektsiooni kasutatakse ka tähekaartide koostamisel.

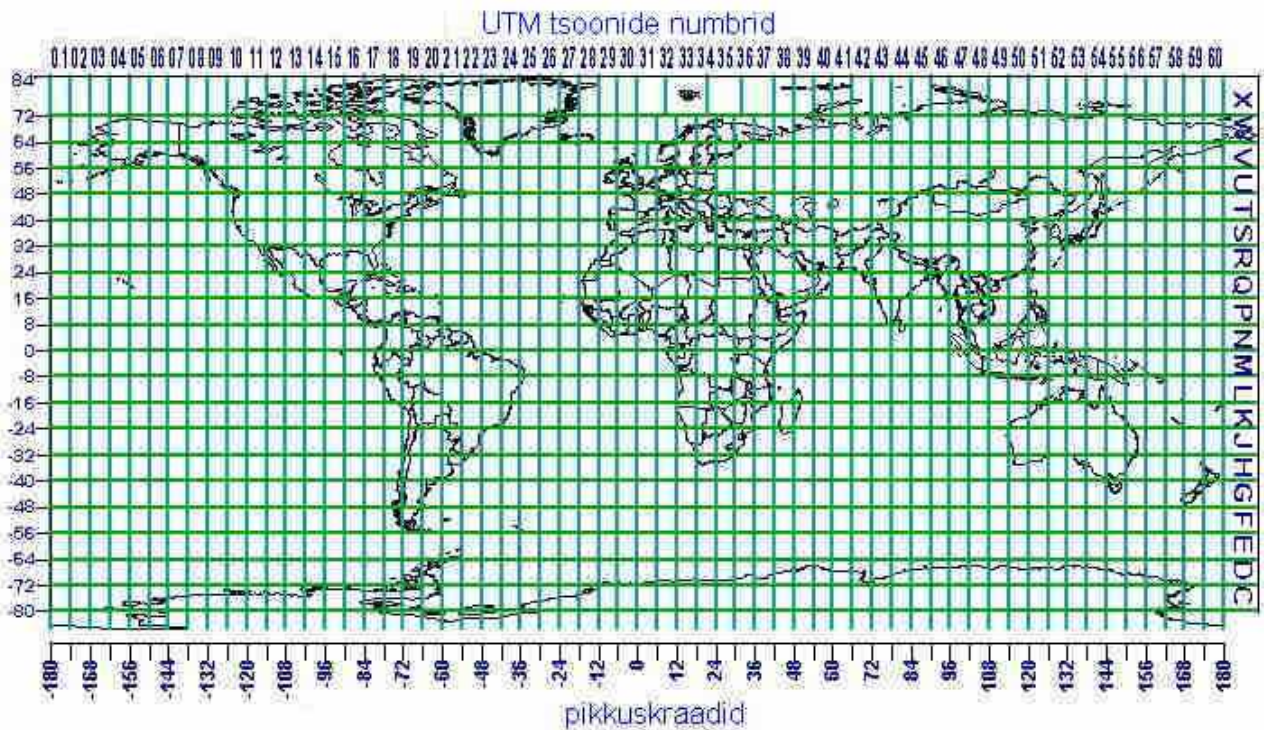
UTM põiksilindriline konformne projektsioon.

Topograafiliste kaartide koostamisel kasutatakse Mercatori põiksilindrilist projektsiooni (UTM-Universal Transverse Mercator), mida hiljem on täiendanud saksa matemaatik, astronoom ja geodeet Karl Friedrich Gauss ning saksa geodeet Louis Krüger, mistõttu nimetatakse seda projektsiooni Gauss-Krügeri projektsiooniks ja sellega seotud ristkoordinaatide süsteemi Gauss-Krügeri koordinaatideks.

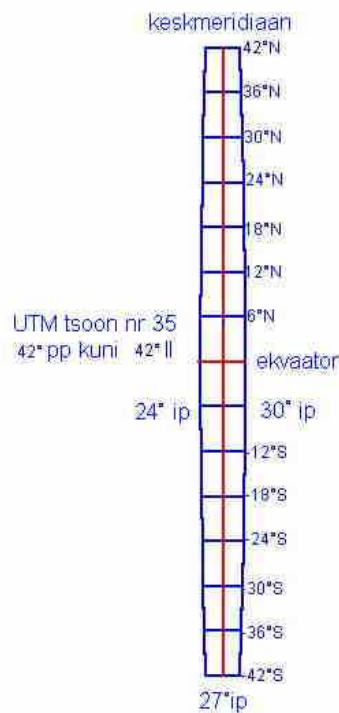
Gauss-Krügeri konformse põiksilindrilise projektsiooni korral on maakera paigutatud silindrisse, mis puutub maakera mööda Greenwichi meridiaani ja silindri telg ühtib ekvaatori teljega. Kogu maakera jagatakse meridiaanidega 6° või 3° tsoonideks. See valik sõltub topograafilise kaardi mõõtkavast. Mõõtkavas 1:10 000 ja väiksemas mõõtkavas kaardid tehakse 6° tsoonides, suurema mõõtkavaga kaardid 3° tsoonides. Tsoonide eristamiseks antakse neile numbrid. Iga tsoon projekteeritakse oma silindri pinnale, mis puutub kera mööda tsooni keskmeridiaani. See meridiaan võetakse tasandilise projektsiooni x-teljeks.

6° tsoonide puhul on telgmeridiaanideks alates Greenwichi meridiaanist $3^\circ, 9^\circ, 15^\circ$ jne., 3° tsoonide telgmeridiaanide idapikkused on alates Greenwichi meridiaanist $3^\circ, 6^\circ, 9^\circ$ jne.

Gauss-Krügeri projektsiooni kohaselt nummerdatakse tsoone alates Greenwichi meridiaanist ida suunas (Eesti jääb 5 ja 6 tsooni). Ülemaailmselt on topograafiliste kaartide korral kasutusel UTM numeratsioon, kus tsoone hakatakse lugema kuupäevareast alates, ehk meridiaanist, mille geografiline pikkus on 180° (Eesti ala jääb tsoonidesse nr 35 ja 36). Paralleelide vahed on projekteeritud vahega 8° geograafilist laiust ja tähistatud ladina tähtedega.

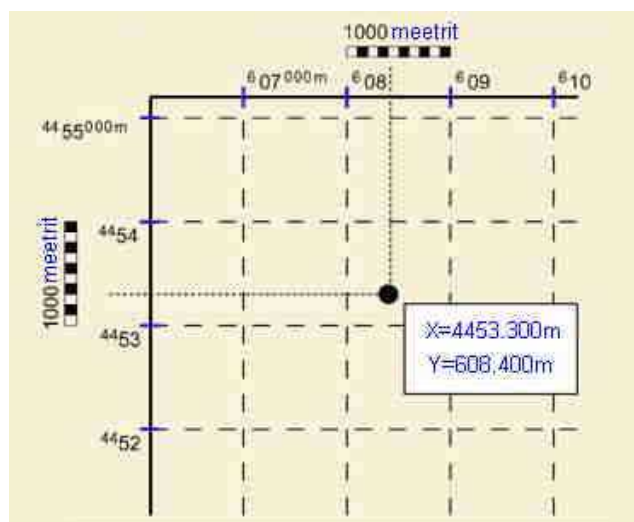


Projekteerides tsoonid eraldi silindrite pinnale ja laotades seejärel silindri pinna tasapinnale, saame tsooni kujutise selles projektsioonis. Tasandil on telgmeridiaani ja ekvaatori kujutised ristuvad sirged, teised meridiaanid on kaared, mis koonduvad poolustel, ning paralleelid on kaared, mille kumer pool on pööratud ekvaatori suunas. Et Gauss-Krügeri projektsioon on konformne, siis kõigi meridiaanide ja paralleelide kujutised on omavahel risti nagu kera pinnalgi.



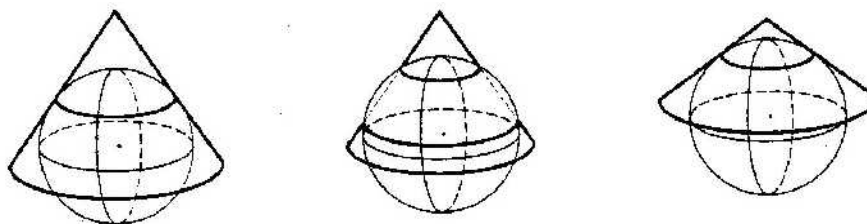
Mõõtkava telgmeridiaanil (keskmeridiaanil) on võrdne ühega ning joonlõikude pikkused telgmeridiaanil on õiged, teistes suundades aga moonutatud ja alati pikemad kui kera pinnal.

Gauss-Krügeri projektsiooni tasandil määratakse kõik geodeetilise põhivõrgu punktid ja tehakse kõik arvutused **Gauss-Krügeri ristkoordinaatide süsteemis**, kus X-telg on iga tsooni telgmeridiaan ja Y-teljeks on ekvaatori kujutis projektsiooni tasandil. Iga tsooni ristkoordinaatide alguspunktiks on vastava telgmeridiaani ja ekvaatori ristumispunkt. Negatiivsete oordinaatide (y-väärtuste) vältimiseks on iga tsooni oordinaadi väärtuseks võetud kokkuleppe kohaselt 500 km ja tsoonide eristamiseks kirjutatakse Y-väärtusele ette ka tsooni number n. (Antud näites on tegemist 6. tsooniga ja punkt asub telgmeridiaanist $500.00-8.400=493.600$ meetrit lääne pool.) X-koordinaadid võivad olla nii + kui – märgiga vastavalt sellele, kas asuvad põhja- või lõunapoolusel. UTM ristkoordinaatide süsteem põhineb WGS-84 ellipsoidil



Koonilised projektsioonid on valdavalt normaalsed (püstised). Põik- ja kaldprojektsiooni kasutatakse koonuse puhul harva. Koonilised kaldprojektsioonid võiksid sobida aladele, mis on väljavenitatud paralleelide suhtes kaldsuunas ning põikprojektsioonid piki meridiaane väljavenitatud aladele.

Koonus kas puutub maaellipsoidi või lõikab seda.

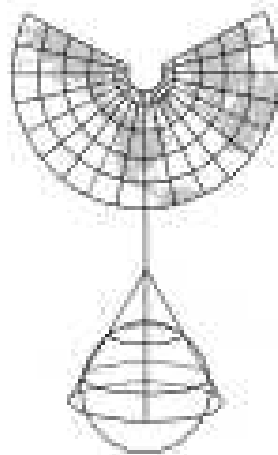


Koonuse kasutamisel siirdepinnana ühitatakse tavaliselt koonuse telg maakera teljega. Koonus puudutab või lõikab kera pinda mööda paralleeli. Neid paralleele nimetatakse **puuteparalleelideks**. Kaardivõrk projekteeritakse konformsuse nõuet arvestades koonuse pinnale, mis seejärel laotatakse tasapinnale. Saadakse lehvik, millel meridiaanid on kujutatud koonuse tipust väljuvate kiirtena ja paralleelid kontsentriliste ringidena.

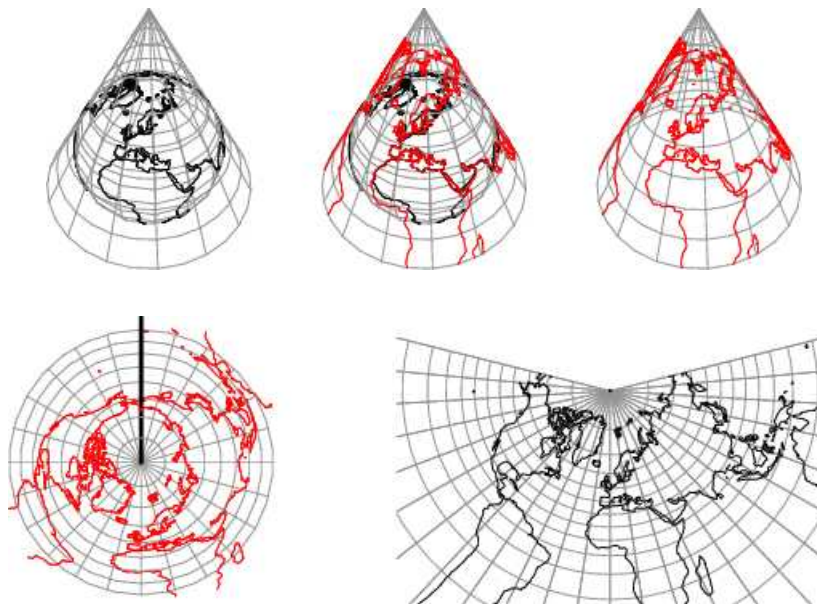
Koonilisi konformseid projektsioonid nimetatakse ka **Lamberti projektsioonideks**, sest nende põhialused töötas 18 sajandil välja prantsuse päritoluga saksa matemaatik Jean Henri Lambert, kelle idee kohaselt säilitatakse telgmeridiaani ja puuteparalleeli asend. Teised meridiaanid

konstrueeritakse risti puuteparalleelidega, säilitades samad vahekaugused, mis olid neil maaellipsoidil. Paralleelide vahekaugused koonuse pinnal saadakse konformsuse nõuet arvestades.

Kui on tegemist **tseentraalse koonilise projektsiooniga**, siis projektsiooni tseenter asub maakera keskpunktis. X-teljeks võetakse üks meridiaanidest (tavaliselt keskmeridiaan).



Kooniliste projektsioonide moonutused olenevad ainult geograafilisest laiusest. Puuteparalleel ja selle läheduses olevad alad on pinnal kujutatud korrektelt, kuid eemaldudes paralleelist pooluse või ekvaatori suunas, hakkavad moonutused suurenema. Koonuse laotamisel tasandile on meridiaanid kujutatud koonusest tipust väljuvate sirgetena ja paralleelid kontsentriliste ringikaartena.



Koonilist konformset projektsiooni kasutatakse Eesti topograafiliste kaartide koostamisel 1:20 000 ja suuremas määtkavas.