

Pildinduse matemaatilistest aspektidest

GERT TAMBERG

Tallinna Tehnikaülikool

Digipilt

Pildistamisel tekitab optiline süsteem (objektiiv) pildistatavate objektide optilised kujutised kujutise tasandil. Neid kujutisi ehk piltte võib käsitleda pidevate funktsioonidena. Digikaamerates registreerib pildi kujutise tasandil paiknev valgustundlikest elementidest maatriks. 2MP (megapiksel) kaamera tüüpiline maatriks on 1600×1200 pikslit (pildipunkti), 8MP korral näiteks 3264×2448 pikslit. Seega muudetakse pidev pilt diskreetseks ehk digipildiks, mida on loomulik esitada maatriksina. Igale maatriksi elemendile vastab mingi heledus, mis omakorda on antud mingi täpsusega (tavaliselt $2^8 = 256$ kuni 2^{16} võimalikku väärtust). Suur osa pilditööstlustehnikaid kasutabki just maatriksesitust.

Eelnev jutt käis mustvalge fotograafia kohta. Järgnevalt veidi värvustest.

Värvusesitused

Värvusi võib vaadata kolmemõõtmelise ruumi punktidenä. Pikseli värvus antakse tavaliselt koordinaatidega (RGB) , kus R kirjeldab punast, G rohelist ning B sinist. Seega on värvipilt määratud kolme mustvalge komponendiga. Suur osa pilditööstlusmeetodid vaatavad neid sõltumatutena, rakendades samu teisendusi igale komponendile eraldi [22]. Komponentid vastavad kineskoobi luminofooridele. Täpsed spektrivärvused (R_c, G_c, B_c) on lainepikkustega $\lambda_r = 700nm$, $\lambda_g = 546,1nm$, $\lambda_b = 435,8nm$.

Praktikas on kasutusel luminofooridele lähedasemad värvused:

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,411 & -0,332 & 0,144 \\ -0,174 & 1,274 & -0,157 \\ -0,007 & -0,132 & 1,050 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_c \\ G_c \\ B_c \end{pmatrix}$$

Värvust võib esitada intensiivsuse ja värvuse kaudu. Kahe koordinaadiga määratud värvsus ei olene kiirguse intensiivsusest. Värvuse paremaks kirjeldamiseks on otstarbekas kasutada silinderkoordinaate, mille alguspunktiks on ühtlaselt valge värvus.

IHS - süsteem ([19], 3.5.4) koosneb intensiivsuskomponendist (I) ja kahest värvuskomponendist, millest üks (S) kirjeldab küllastust, teine (H) värvitooni. Seega, matemaatiliselt on

$$H = \arctan\left(\frac{U}{V}\right), \quad S = (U^2 + V^2)^{1/2},$$

kus (reeglina kasutatakse keerulisemat mittelineaarset kuju, vt [11], 6.2.3)

$$\begin{pmatrix} I \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

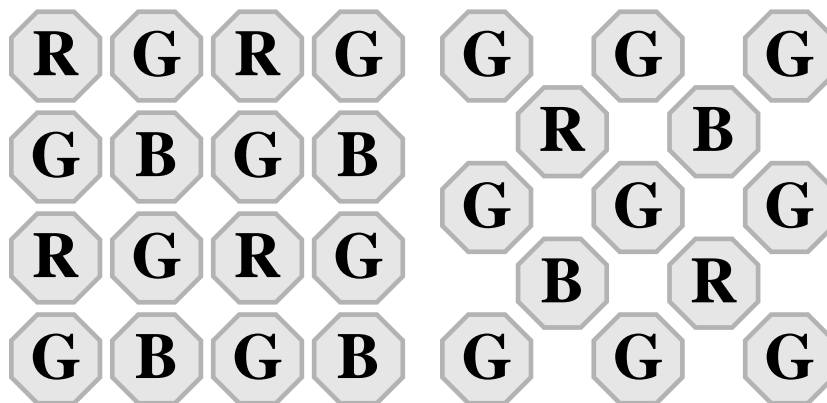
Selline intensiivsuse (I) arvutamine ei ole kooskõlas inimsilma tundlikkuskõveraga, mille maksimum paikneb rohelises spektriosas. Levinuima intensiivsuse arvutamise meetodi korral võetakse värvuskomponentide RGB suhe 3 : 6 : 1. JPEG (*Joint Photographic Experts Group*) formaadi korral kasutatakse värvusesitust YC_bC_r :

$$\begin{pmatrix} Y \\ C_b \\ C_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,299 & 0,587 & 0,114 \\ -0,1687 & -0,3313 & 0,5 \\ 0,5 & -0,4187 & -0,0813 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

JPEG- formaadis loobutakse failisuuruse vähendamiseks osast värvusinfost, näiteks tähistatakse komponentide YC_bC_r vahakordi pildindusprogrammides reeglina: 4:4:4, 4:2:2, 4:1:1, 4:0:0 – mustvalge. Paletti kasutavate pildiformaatide GIF (*Graphics Interchange Format*) ja PNG (*Portable Network Graphics*) korral kasutatakse pildi esitamiseks mingit värvusruumi punktide valimit – paletti.

Värvused digifotograafias

Värvipildi saamiseks peab optilise süsteemi tekitatud pildi värvuskomponentideks jagama. Ilmne lahendus on kolme valgustundliku maatriksi kasutamine. Pilt jagatakse prismadega kolmeks, igal



Joonis 1. Bayeri valgusfiltrite elementide paigutusi. Üldlevinud on vasakpoolne

maatriksil on oma (punane , roheline või sinine) valgusfilter. Kuigi see lahendus on kasutusel profivideokaamerates, on ta puuduseks kõrge maksumus.

Enamik digikaameraid kasutab üht valgustundlike elementide maatriksit, mille igale elemendile on kantud sobivat spektriosa läbilaskev filter. Levinuim on nn Bayeri valgusfilter¹, mis jagab maatriksi 2×2 plokkideks, mille peadiagonaali elementidel on ühel punane, teisel sinine valgusfilter ning ülejäänud kahel elemendil roheline valgusfilter (joonis 1). Selline jaotus on kooskõlas inimsilma tundlikkuskõveraga, võimaldades rohelises kanalis suuremat täpsust. Mõnikord kasutatakse parema värvusesituse saamiseks kahte erinevate parameetritega rohelist valgusfiltrit.

Pealtnäha on kõik ilus, kuid tuleks arvestada, et meie 8MP kaamera on 8MP ainult mustvalget objekti pildistades. Me saame 4MP rohelist ja ainult 2MP punast ja sinist pildi. Sellega hädad veel ei lõpe, nimelt on meil 8MP pildi korral igal pildipunktil ainult üks värvuskomponent. Meie kaamera peab kuidagi leidma puuduvad kaks

¹Nimetus tuleneb 1976. aastal seda tüüpi valgusfiltri patenteerinud Bryce E. Bayeri nimest (US Patent 3 971 065, 20.07.1976).



Joonis 2. Bayeri valgusfiltrite tekitatud RAW- pilt. Kõrval $4\times$ suurendatud detail ning R , G ja B kanalid

komponenti, mis ei ole sugugi triviaalne ülesanne. Kuna eri värvuskomponendid ei ole antud samas punktis, siis on maksimaalse eraldusvõimega digipiltidele tüüpiline värvusmüra – ühtlase värvusega pinna asemel näeme veidi punakamate, rohekamate ning sinakamate punktide kogumit. Mida vähem valgust pildisensorile langeb, seda märgatavam on värvusmüra. Joonisel 1 toodud pildisensori lahendustest peetakse vähese valguse jaoks paremaks parempoolset. Kuna digikaamera protsessori arvutusvõimsus on piiratud, võimaldavad paremad kaamerad salvestada pilte ka nn RAW- formaadis, s.t Bayeri valgusfiltriga valgustundliku maatriksi elementide tekitatud mustvalgete piltidena (joonis 2). RAW- formaadi edasiseks töötlemiseks saab arvutis kasutada paremaid algoritme.

Eelnevast selgus, et juba diskreetse digipildi kaamerast kättesaamiseks tuleb teha mitmesuguseid “trikke”. Diskreetsete piltide suurendamine ja vähendamine nõuavad veelgi kavalamaid algoritme. Kogu sellest diskreetsest “trikitamisest” saab loobuda, kasutades pidevat pilti. Siin tulevadki mängu valimread, mis on funktsiooni esitused funktsionaalreana, mille kordajad on sama funktsiooni väärtused etteantud sõlmedes.

Valimread

Olgu meil funktsioon f , mis on määratud piirkonna D igas punktis ning on seal esitatav kujul

$$f(t) = \sum_k f(t_k) s_k(t),$$

kus $\{t_k\}$ on valim piirkonna D punkte ning s_k on nn baasfunktsioonid. Sellist arendust nimetatakse valimreaks. Funktsioon f on täielikult esitatud oma väärtuste (valimi elementide) kaudu oma määramispiirkonna diskreetsel alamhulgal. Lihtsa valimrea näitena vaatame lineaarfunktsiooni $f(t) = at + b$ ($t \in \mathbb{R}$) valimrida kujul

$$f(t) = f(0)(1 - t) + f(1)t.$$

Saadud tulemust üldistades saame Lagrange'i interpolatsioonivalemi. Klassikalise valimrea

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \operatorname{sinc}(t - k),$$

kus nn kardinaalsiinus

$$\operatorname{sinc}(x) := \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq 0, \end{cases}$$

sai É. Borel [2] aastal 1899 Lagrange'i interpolatsioonivalemi piirjuhuna. Klassikalise valimrea korral kehtib sideteoorias kesksel kohal olev Whittaker-Kotelnikov-Shannoni teoreem. Kuna klassikalise valimrea tuumaks on kardinaalsiinus (*sinus cardinalis*), nimetatakse valimridu mõnikord kardinaalriidadeks. Põhjalikuma ajaloolise ülevaate võib leida töödest [7], [12], [17] ning seal viidatud allikatest.

Valimread ja megapikslid

Pilditöötluses on pilt tavaliselt esitatud maatriksina, kuid ei tohiks unustada, et digipildid esitavad pidevaid loomulikke pilte. Valimread annavad meile loomuliku meetodi diskreetsete pikslitena esitatud pildi pideva funktsioonina käsitlemiseks.

Reaalteljel integreeruva funktsiooni $f \in L(\mathbb{R})$ Fourier' teisendus f^\wedge on $v \in \mathbb{R}$ korral defineeritud kujul

$$f^\wedge(v) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ivt} dt. \quad (1)$$

Funktsioon f on piiratud ribaga, kui $f^\wedge(v) = 0$, $|v| > \sigma$. Klassikaline valimrida koondub funktsiooniks f siis, kui $\sigma < 1$.

Valimridadega esitatud pildid ei saa olla piiratud ribaga funktsioonid, kuna Heisenbergi määramatuse printsiip väidab Fourier' teisenduse korral ([1] lk 125), et funktsioon ning tema Fourier' teisendus ei saa samaaegselt olla lõpliku kandjaga. Siis peaksime arvata loobuma tingimusest, et Fourier' teisendus oleks lõpliku kandjaga. Teisalt tekitab difraktsiooniga piiratud² optiline süsteem alati piiratud ribaga pildi (tavaobjektiivide korral seavad piiri reeglina juba aberratsioonid). Praktikas võime lõplikku pilti jätkata (näiteks perioodiliselt või antiperioodiliselt, vt joonis 3), saades nii piiratud ribaga pildi.

Nagu eelnevas mainitud, on reaalsele optilistele süsteemidele omased mitmesugused aberratsioonid, mida püütakse vähendada näiteks erinevate optiliste omadustega materjalide (kromaatiliste aberratsioonide vähendamiseks) ning asfääriliste (sfääriliste aberratsioonide vähendamiseks) elementide kasutamisega. Objektiivi iseloomustab tema lahutusvõime, mida tavaliselt mõõdetakse joontes millimeetri kohta. Digikaamerate pildisensorid on reeglina filmikaadrist märgatavalt väiksemad, mistõttu sama kvaliteediga foto saamiseks peaks objektiiv vastavalt parem olema (tihti on digikaamera objektiiv hoopis halvema kvaliteediga). Samas on uute pildisensorite valgustundlike elementide tihedus tihti suurem tavaobjektiivide lahutusvõimest.

Valimread võimaldavad tekkinud olukorda lihtsalt kirjeldada. Vaatame klassikalist valimrida:

$$(S_W^{\text{sinc}} f)(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{W}\right) \text{sinc}(Wt - k).$$

²Difraktsiooniga piiratud süsteemidest vt [3], ptk 11.

Suurendades parameetrit W (võttes valimi punkte tihedamini, s.t suurendades pildisensori megapikslite arvu), siis funktsiooni f ja tema valimrea $S_W^{\text{sync}} f$ väärtused lähenevad üksteisele. Kui funktsioon on piiratud ribaga σ (objektiivihäirete tugevus), siis $W > \sigma$ korral funktsiooni f ja tema valimrea $S_W^{\text{sync}} f$ väärtused langevad kokku (arvutusvõime). Parameetri W edasine suurendamine ei oma mõtet, lisaks võivad arvutusvead kuhjuda.

Pildi kvaliteedi osas ei ole vahet, kas me kasutame viletsa objektiiviga digikaameras 3MP, 8MP või 16MP sensorit. Pilt ei parane – mida rohkem megapikseleid, seda rohkem häireid. Seega on digikaamera korral megapikslitest olulisemad pildisensori mõõtmed ning loomulikult optika kvaliteet.

Valimread piltide esitamisel

Eelmises osas tõime sisse klassikalise Whittaker-Kotelnikov-Shannoni valimrea, mis on 1D valimrida. Leidub ka mitme muutuja funktsioonide valimteoreeme (vt [24], Th. 6.4). Pilditöötluses on enamik operaatoreid faktoriseeruvad, mistõttu 2D valimrida ($u, v \in \mathbb{R}$) (vt [24], valem (6.1.1))

$$(Sf)(u, v) := \sum_{j, k} f(j, k) s_1(u - j) s_2(v - k) \quad (2)$$

on mõistlik valik diskreetse pildi pidevaks esitamiseks. Kui tuumadel s_1 ja s_2 on lõplik kandja, võib ka pildimaatriksis väärtuste hulk $\{f(j, k)\}$ olla lõplik. Lõpmatu kandjaga tuumade korral tuleb pilti jätkata.

Tüüpilised pilditöötluses kasutatavad tuumad on B-splainid (vt [28])

$$\beta_n(t) = \underbrace{(\beta_0 * \dots * \beta_0)}_{n+1}(t),$$

kus

$$\beta_0(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1/2, \\ 1/2, & |t| = 1/2, \\ 0, & |t| > 1/2, \end{cases}$$



Joonis 3. Antiperioodiliselt jätkatud pilt

ning konvolutsioon on defineeritud kujul

$$(f * g)(t) := \int_{\mathbb{R}} f(t - u)g(u) du.$$

Definitsiooni (2) kasutades saame diskreetsete pikslitena esitatud pildi f esitada lihtsa B-splainide valimreana:

$$(M_n f)(u, v) = \sum_{j, k} f(j, k) \beta_n(u - j) \beta_n(v - k).$$

On võimalik kasutada ka keerulisemaid tuumi, mis on saadud B-splainide kombinatsioonina. P. L. Butzer ning tema koolkond on esitanud põhjaliku ülevaate B-splainide valimoperaatorite lähendusomadustest töödes [6], [7] ning seal viidatud allikates. Ülevaate B-splainide valimridade kasutamisest pildi- ja signaalitöötluses annavad artiklid [28], [26] ning seal viidatud allikad.

Ülevaates [26] jõutakse järeldusele, et nii teoreetilistest kui ka praktilistest kaalutlustest lähtuvalt on tuuma kvaliteedi hindamise olulisim kriteerium vastava valimrea lähendusjärk. Arvutuskiiruse seisukohalt on olulisim tuuma kandja pikkus.

Praktilistes rakendustes võib lõpliku ning lõpmatu kandjaga tuumade erinevus olla ebaoluline, kuna mõned tuumad $s(t)$ kahanevad protsessis $t \rightarrow \pm\infty$ küllalt kiiresti.

Piltide suuruse muutmine

Digipildi korral on üks keerulisemaid probleeme pildi suuruse muutmise – on ju pilt salvestatud diskreetsete pikslitena. Pildi suurendamiseks/vähendamiseks on välja mõeldud mitmeid meetodeid. Täpsemalt võib lugeda ülevaadetest [26], [16], [17] ning [18]. Valimreana esitatud pildi korral on suuruse muutmise elementaarne. Tõepoolest, sel juhul on pilt kogu piirkonnas $D \subset \mathbb{R}^2$ määratud pidev funktsioon. Sama kehtib ka üldise koordinaatide teisenduse korral. Nii ei olegi imeksandav, et enamik kvaliteetseid piltide suurendamise/vähendamise algoritme põhineb just valimridadel.

sinc-funktsioon ei ole pilditöötlemises eriti levinud tuum. Probleem seisneb selles, et sinc on määratud kogu reaalteljel ning lisaks kahaneb liiga aeglaselt (ei ole integreeruv kogu reaalteljel). Sellest puudusest vabanemiseks on kasutusel sinc-i korrutamine mingi aknafunktsiooniga. Kõige populaarsemad tuumad piltide suurendamiseks on nn Lanczose n -tuumad, mis kujutavad endast sinc-funktsiooni, mis on korrutatud Lanczose aknafunktsiooniga $\text{sinc}(u/n)$ (vt [18], [27]).

Kardinaalsiinust võib korrutada ka muude aknafunktsioonidega, kuid Turkowski [27] väitel on just Lanczose n -tuumad parimad 2D piltide suuruse muutmiseks. Teise klassi sobivaid tuumi moodustavad splineid (või ka lihtsalt tükati polünoomiaalsed tuumad). Populaarsemad on mitmesugused kuupsplineid. Üldjuhul on Lanczos parim loomulike piltide korral, splineid annavad teatud kunstlike või häiretega piltide korral paremaid tulemusi.

Vaatame näitena vabavara³ *IrfanView* (ver 4.00), millel on küllalt korralik valik valimridade tuumi pildi suuruse muutmiseks:

Hermite tükati polünoomiaalne tuum,

Triangle sinc korrutatud lineaarse (kolmnurk) aknafunktsiooniga,

³<http://www.irfanview.de/> või <http://www.irfanview.com/>



Joonis 4. Gradiendi pikkuse ning sihiga teisendatud pilt. Pildid on genereeritud programmiga *ImageJ*, kasutades vastavat pluginat

Mitchell klass kuupsplaine,

Bell Gaussi kõver (normaaljaotuse jaotustihedus),

B-Spline B-splainid (kuup),

Lanczos Lanczos 3.

Igäüks võib lihtsalt proovida, milline tuum iga konkreetse pildi korral parema tulemuse annab. Muid kasutatavaid tuumi võib leida ülevaadetest [26], [27], [18] ning seal viidatud allikatest.

Kontuuride leidmine

Pilditöötlemise teine oluline valdkond on kontuuride leidmine. Tihti sisaldavad just kontuurid meie olulist infot, mida edasi töödelda. Inimsilma ehitusest tulenevalt on kontuurid olulised pildi visuaalse kvaliteedi parandamisel (teravuse tõstmisel).

Kontuuri võiks määratleda kui heleduse järsku muutust pildis. Kuna me vaatame pilti funktsioonina, siis selline muutus tekitab selle funktsiooni tuletise suure väärtuse. Seega on peamised tööriistad kontuuride leidmiseks diferentseerimisoperaatorid.

Praktikas levinuim kontuuride leidmise meetod (vt joonis 4) kasutab gradiendi

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{i}_y$$

pikkust

$$|\nabla| = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2},$$

mõnikord ka gradiendi sihti

$$\psi(\nabla) = \arctan\left(\frac{\frac{\partial}{\partial y}}{\frac{\partial}{\partial x}}\right).$$

Enamikus pilditöötlusprogrammides kasutatakse gradiendi arvutamisel $\frac{\partial}{\partial x}$ ja $\frac{\partial}{\partial y}$ analoogidena Sobeli filtrimaatrikseid (vt [11], 3.7.3, [13], 10.9.4, [3], lk 285, [19], 15.2.1) (vt joonis 5):

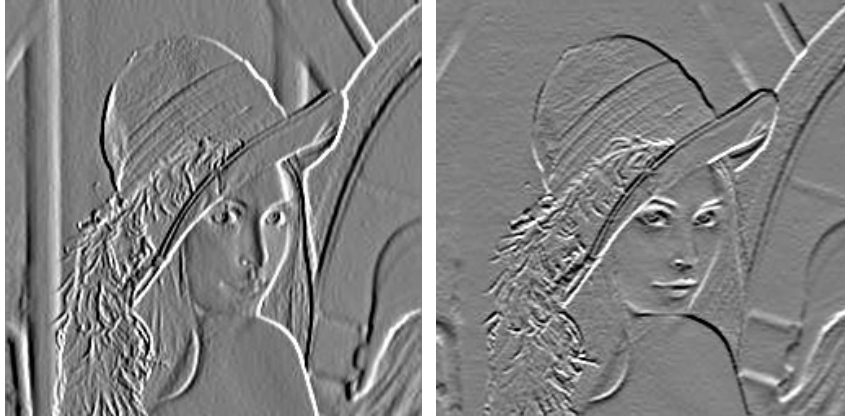
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Näitame, et Sobeli filtrid saab tuletada, kasutades valimridu. Esitame pildi valimreana. Kuna pildi suurus ei muutu, omandab valimrea pooldiskreetne konvolutsioon ($p, q \in \mathbb{Z}$)

$$(Sf)_{mn}(p, q) := \sum_{j=p-m}^{p+m} \sum_{k=q-n}^{q+n} f(j, k) s_1(p-j) s_2(q-k) \quad (3)$$

diskreetsed väärtused. Siin võtame praktiliseks arvutamiseks tuumad s_1 ja s_2 võrdseks nulliga väljaspool vahemikke pikkusega vastavalt $2m+2$ ja $2n+2$. Formaalselt saame pildi tuletised, võttes tuletisi vastavatest tuumafunktsioonidest.



Joonis 5. Horisontaalne ja vertikaalne tuletis. Pildile on rakendatud Sobeli filtreid

Artiklis [15] tõime me sisse Hanni⁴ aknafunktsiooni kaudu defineeritud tuumad ($n \in \mathbb{N}$),

$$s_{H,2n}(t) := \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \text{sinc}(t + k - n),$$

mis annab valimrea

$$(S_H f)_{mn}(p, q) := \sum_{j=p-m}^{p+m} \sum_{k=q-n}^{q+n} f(j, k) s_{H,2m}(p-j) s_{H,2n}(q-k). \quad (4)$$

Kehtib $s_{H,2n}(\pm k) = 0$ kui $k > n$, seega $(S_H f)(p, q) = (S_H f)_{mn}(p, q)$, kui $p, q \in \mathbb{Z}$.

Võtame valimrea tuumaks klassikalise Hanni tuuma $s_H := s_{H,2}$,

⁴"Hann" on selle aknafunktsiooni korrektne nimetus, kuigi levinum on kuju "Hanning". Aknafunktsioon on oma nime saanud kuulsa Austria meteoroloogi Julius Ferdinand von Hanni (1839–1921) järgi (vt [10]).

mis võimaldab meil kasutada vektorit pikkusega 3.

$$\begin{aligned} \nabla(Sf)_{11}(x, y) := \\ \sum_{j=x-1}^{x+1} \sum_{k=y-1}^{y+1} f(j, k) (s'(x-j)s(y-k) \vec{i}_x + s(x-j)s'(y-k) \vec{i}_y) \end{aligned}$$

Tuletiste korral võtame vektori pikkuse sama mis tuumal ning saame tuumale ja tuuma tuletisele vastavad vektorid:

$$\mathbf{a} := (s_H(-1), s_H(0), s_H(1)) = \frac{1}{4}(1, 2, 1), \quad \mathbf{a}' := \frac{3}{8}(1, 0, -1).$$

Osatuletisele $\frac{\partial}{\partial x}$ vastava maatriksi saame välja kirjutada Kroneckeri korrutise abil:

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{a}' = \frac{3}{32} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{3}{32} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Saadud maatriks langeb kordaja täpsusega kokku Sobeli filtrimaatriksiga.

Klassikaline kontuuride leidmise meetod (vt joonis 7) kasutab Laplace'i operaatorit

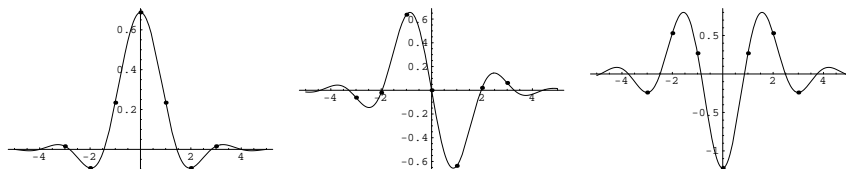
$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Hanni tüüpi tuumade pere

$$s_{\bar{H},n}(t) := \text{sinc}(t) - \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{k+n} \binom{2n}{k} \text{sinc}(t+k-n)$$

omab eriti häid lähendusomadusi. Kehtib $s_{\bar{H},n}(\pm k) = 0$, kui $k > n$, seega $(S_{\bar{H}}f)(p, q) = (S_{\bar{H}}f)_{mn}(p, q)$, kui $p, q \in \mathbb{Z}$.

Diskreetsete konvolutsioonide arvutamise võimalus on olemas peaaegu igas pilditötlusprogrammis. Kahjuks on kasutatava tuuma suurus tihti kõigest 3×3 maatriks. *Adobe Photoshopi* pluginaid toetavate pilditötlusprogrammidega (näiteks ka *IrfanView*



Joonis 6. Hanni tüüpi tuum $s_{\bar{H},3}$, tema esimene ning teine tuletis

uuemad versioonid) on võimalik kasutada Russi pilditöötamise teemalise raamatu [20] lisana ilmunud pluginavaliku IPTK (*The Image Processing Tool Kit*) vabavaralist konvolutsioonipluginat⁵. Antud plugin võimaldab kasutada 7×7 matriksit, seega sobivad täpselt Hanni tüüpi tuumad $s_{\bar{H},3}$ (vt joonis 6). Rakendades Laplace'i operaatorit valimreale, saame

$$\Delta (Sf)_{33}(x, y) := \sum_{j=x-3}^{x+3} \sum_{k=y-3}^{y+3} f(j, k) (s''(x-j)s(y-k) + s(x-j)s''(y-k)).$$

Võttes tuuma $s_{\bar{H},3}$ täisarvulised argumendi väärtused $t = -3$ kuni $t = 3$, saame tuumale ja tuuma tuletisele vastavad vektorid:

$$\mathbf{a} := \frac{1}{64}(1, -6, 15, 44, 15, -6, 1),$$

$$\mathbf{a}' := \frac{1}{1280}(-79, -26, 815, 0, -815, 26, 79).$$

Praktikas sobivate teisenduste korral on tuuma vektori elementide summa võrdne ühega, mis on ka üks valimrea põhitingimusi. Antud juhul on see täidetud, kuna $s_{\bar{H},3}(\pm(3+k)) = 0$, kui $k \in \mathbb{N}$. Tuuma tuletiste vektorite korral peaks elementide summa võrduma nulliga. Esimese tuletise korral on see tingimus täidetud. Tuuma teisele tuletisele vastava vektori saame kujul

$$(-0, 241; 0, 530; 0, 269; -1, 224; 0, 269; 0, 530; -0, 241),$$

⁵Konvolutsiooniplugin (*Custom Filter*) <http://www.reindeergraphics.com>



Joonis 7. Originaalpilt ning Laplace'i operaatori rakendamisel saadud pilt. Kasutatud tekstis toodud 7×7 maatriksit, seejärel negatiivpilt

kus elementide summa on $-0,108$ (seega 7-elementilise vektori saamiseks ärajäetud elementide summa on $0,108$). Nulliga võrduva vektori elementide summa saamiseks muudame keskmise elemendi väärtust, saades

$$\mathbf{a}'' := (-0,241; 0,530; 0,269; -1,116; 0,269; 0,530; -0,241).$$

Sobiva teisendusmaatriksi saame esitada Kroneckeri korrutiste abil:

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{a}'' + \mathbf{a}''^\top \mathbf{a} \approx \begin{pmatrix} -0,008 & 0,031 & -0,052 & -0,183 & -0,052 & 0,031 & -0,008 \\ 0,031 & -0,099 & 0,099 & 0,469 & 0,099 & -0,099 & 0,031 \\ -0,052 & 0,099 & 0,126 & -0,077 & 0,126 & 0,099 & -0,052 \\ -0,183 & 0,469 & -0,077 & -1,533 & -0,077 & 0,469 & -0,183 \\ -0,052 & 0,099 & 0,126 & -0,077 & 0,126 & 0,099 & -0,052 \\ 0,031 & -0,099 & 0,099 & 0,469 & 0,099 & -0,099 & 0,031 \\ -0,008 & 0,031 & -0,052 & -0,183 & -0,052 & 0,031 & -0,008 \end{pmatrix}.$$

Häirete vähendamiseks pildis võib kasutada heade lähendusomadustega Hanni tüüpi tuuma $s_{\bar{H},3}$ tekitatud maatriksit $\mathbf{a}^\top \mathbf{a}$. Lineaarsed filtrid on kahjuks mürade eemaldamisel üpris väheefektiivsed, mittelineaarsed annavad reeglina paremaid tulemusi.

3×3 Laplace'i maatriksi saame näiteks, kasutades interpolatsioonitüüpi tuuma s_I , s.t $s_I(0) = 1$ ja $s_I(\pm n) = 0$, kui $n \in \mathbb{N}$. Näiteks sinc ja Lanczos n tuumad on interpolatsioonitüüpi. Tuumale vastava vektori kõik elemendid peale keskmise on võrdsed nulliga. Teise tuletise jaoks kasutame [25] sisse toodud Blackmani tüüpi tuuma

$$s_{B,\mathbf{a}(\frac{21}{32},0)}(t) := \frac{41t^4 - 230t^2 + 189}{8(9-t^2)(4-t^2)(1-t^2)} \operatorname{sinc} t,$$

mille teisele tuletisele vastav vektor on $(0, 983; -1, 970; 0, 983)$. Saame interpolatsioonitüüpi tuumale vastava vektori ning $s_{B,\mathbf{a}(\frac{21}{32},0)}$, mis on hea lähend vektorile

$$\mathbf{a} := (0, 1, 0), \quad \mathbf{a}'' := (1, -2, 1).$$

Sobiva teisendusmaatriksi saame esitada Kroneckeri korrutiste abil:

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{a}'' + \mathbf{a}''^\top \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

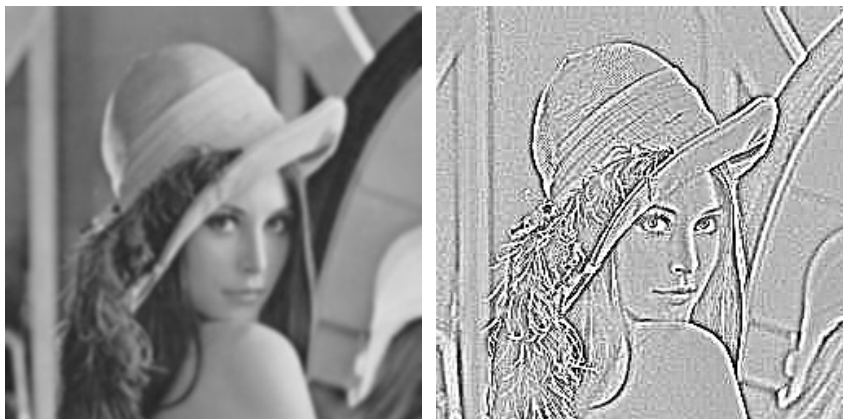
Antud maatriks on pildinduses küllaltki levinud (vt [11], 3.7.2, [13], 10.10.1, [3], lk 287, [19], 15.3.1). Võttes interpolatsioonitüüpi tuuma s_I asemel klassikalisele Hanni tuumale s_H vastava vektori $\frac{1}{4}(1, 2, 1)$ ning kasutades teise tuletise jaoks vektorit \mathbf{a}'' , saame

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Võttes kaalutud keskmise kaaludega $2/3$ ja $1/3$, saame teisendusmaatriksi

$$(2/3) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1/3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

mis (ilma kordajata) on pilditötlusealases kirjanduses (vt [11], 3.7.2, [3], lk 287, [19], 15.3.1) ja programmides levinuim Laplace'i operaatori analoog.



Joonis 8. Madal- ja kõrgpääsfiltrid, kasutades valimrida Hanni tuumaga $s_{H,6}$

Madal- ja kõrgpääsfiltrid

Lisaks piltidest kontuuride leidmisele on levinud piltidele mitmesuguste siluvate ([11], 3.6, [13], 10.3–10.7) ja teravdavate ([11], 3.7) filtrite rakendamine. Siluvat filtrit võib vaadata kui madalpääsfiltrit (*low pass filter*, LPF), mis filtreerib pildist välja kõrged ruumisagedused (väikesemõõtmelised objektid, sealhulgas ka häired), lastes läbi madalad (vt joonis 8). Selliseid filtreid võib kasutada näiteks pildist kõrgsagedusliku müra eemaldamiseks. Olenevalt müra tüübist, näiteks normaaljaotusega müra korral, võib madalpääsfilter soovitud tulemust mitte anda. Teatud tüüpi müra korral võib paremini sobida kaalutud keskmiste ning mediaani kombineerimine.

Vaatame jällegi valimridu Hanni tüüpi tuumadega $s_{H,2n}$. See tuum on heade siluvate omadustega – mida suurem on parameeter n , seda suurem on siluv $(2n + 1) \times (2n + 1)$ maatriks ning tugevam selle toime. Saamaks 7×7 maatriksi, võtame tuumaks $s_{H,6}$, mis diskretiseerimisel annab vektori

$$\mathbf{a} := \frac{1}{64}(1, 6, 15, 20, 15, 6, 1).$$

Vastav maatriks on kujul

$$\mathbf{a}^T \mathbf{a} = \frac{1}{4096} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ 6 & 36 & 90 & 120 & 90 & 36 & 6 \\ 15 & 90 & 225 & 300 & 225 & 90 & 15 \\ 20 & 120 & 300 & 400 & 300 & 120 & 20 \\ 15 & 90 & 225 & 300 & 225 & 90 & 15 \\ 6 & 36 & 90 & 120 & 90 & 36 & 6 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sama tulemuse saame klassikalisele Hanni tuumale s_H vastava vektori $\frac{1}{4}(1, 2, 1)$ tekitatud maatriksi ([13], valem (10.22)) kolmekordsel rakendamisel. Sellised filtrimaatriksid on nn väikese tekitava tuumaga ([19], 9.5). Antud 7×7 maatriksit (binoomfilter vt [13], 10.4, programmides tihti Gaussi filter) võib käsitleda madalpääsfiltrina. Kõrgpääsfiltri (*high pass filter*, HPF) saame, lahutades pildist madalpääsfiltri rakendamise tulemuse.

Pildi teravdamiseks on üks populaarsemaid meetodeid nn ebarav mask (vt joonis 9). Vastava filtri saame, võttes pildi ning kõrgpääsfiltri rakendamise tulemuse kaalutud keskmise. Hanni tuumale $s_{H,6}$ vastav maatriks on kujul ($c > 1$)

$$\frac{1}{4096(c-1)} \begin{pmatrix} -1 & -6 & -15 & -20 & -15 & -6 & -1 \\ -6 & -36 & -90 & -120 & -90 & -36 & -6 \\ -15 & -90 & -225 & -300 & -225 & -90 & -15 \\ -20 & -120 & -300 & -400 + 4096c & -300 & -120 & -20 \\ -15 & -90 & -225 & -300 & -225 & -90 & -15 \\ -6 & -36 & -90 & -120 & -90 & -36 & -6 \\ -1 & -6 & -15 & -20 & -15 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mida suurem on parameetri c väärtus, seda väiksem on teravustamise efekt.

Kõrgpääsfiltri asemel võib kasutada ka eespool vaadeldud Laplace'i filtrit. Ilus lineaarsete filtrite matemaatiline käsitus on toodud [13] või [14].

Ruumisagedustega seotud teisendusi on loomulik arvutada, kasutades Fourier' teisendust, millest järgnevas lähemalt.



Joonis 9. Ebateravad maskid, kus on kasutatud valimrida Hanni tuumaga $s_{H,6}$ ning parameetreid $c = 1, 5$ ja $c = 3$

Fourier' teisendus

Mitmed pilditötlusmeetodid kasutavad Fourier' teisendust, kuna paljud originaaliruumis (pildimaatriksiga) tehtavad teisendused nõuavad kujutiseruumis märksa lihtsamaid tehteid.

Pilditötluses on enam kasutatud Fourier' teisenduse

$$f^\wedge(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ivt} dt$$

analoogi diskreetset Fourier' teisendust (DFT) \mathcal{F} , mis seab vektorile $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ vastavusse vektori $\mathbf{c} = \mathcal{F}\mathbf{a}$, mille elemendid on

$$\begin{aligned} c_k &:= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \exp\left(-\frac{i2\pi jk}{n}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left(\cos \frac{2\pi jk}{n} + i \sin \frac{2\pi jk}{n} \right). \end{aligned}$$

Pöördteisendus $\mathcal{F}^{-1}c = a$ on kujul

$$a_j := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \exp\left(\frac{i2\pi jk}{n}\right).$$

Diskreetne Hartley teisendus (DHT, vt [4]) $\mathcal{H}a = c$:

$$c_k := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left(\cos \frac{2\pi jk}{n} + \sin \frac{2\pi jk}{n} \right).$$

Pöördteisendus $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}^{-1}$, kuna $\mathcal{H}(\mathcal{H}a) = a$. Kui $a \in \mathbb{R}^n$, siis $\mathcal{F}a \in \mathbb{C}^n$, aga $\mathcal{H}a \in \mathbb{R}^n$. Fourier' teisendus avaldub Hartley teisenduse kaudu:

$$\mathcal{F}a = \frac{1}{2} (\mathcal{H}a + \underline{\mathcal{H}}a - i(\mathcal{H}a - \underline{\mathcal{H}}a)),$$

kus $\underline{\mathcal{H}}a$ tähendab tagurpidi järjestust.

Kiire Fourier' teisendus (FFT) võimaldab arvutada $n = 2^m$ ($m \in \mathbb{N}$) liikmega jada DFT $n \log_2 n$ aritmeetilise tehete (n^2 asemel). Analoogiline meetod on kasutatav ka kiire Hartley teisenduse (FHT) korral⁶, kusjuures tehete arv on paar korda väiksem kui FFT korral. Kiiremad DFT arvutamise algoritmid kasutavadki FHT-d.

Ruumisageduste otsene filtreerimine on küllalt vähe levinud, kuna peamine info on ikkagi pildimaatriksis. Fourier' teisendus on kasutusel ka pildist kindlate sagedusomadustega häirete eemaldamiseks. Tüüpjuht on mingi raster või sidekanali häire. Sama meetod sobib ka liikuvast kaamerast põhjustatud häirete korral.

Pilditeisendused

Eelnevalt käsitletud Fourier' teisendust ning filtreid võib esitada ka maatrikskujul. Tegemist on lineaarsete teisendustega kujul

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x},$$

kus $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_2}$ ja \mathbf{y} on vektoriseeritud maatriksid ning \mathbf{H} teisendusmaatriks. Lineaarne teisendus $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$ on faktoriseeruv, kui

⁶US Patent 4 646 256, 24.02.1987

me saame lahutada teisenduse tuuma h kaheks komponendiks, mis kumbki sõltub ainult ühest summeerimismuutujast:

$$y(u, v) = \sum_{j=0}^{M_1} \sum_{k=0}^{M_2} x(j, k) h(j, u, k, v) = \sum_{j=0}^{M_1} \sum_{k=0}^{M_2} x(j, k) h_1(j, u) h_2(k, v).$$

Siit saame:

$$\begin{aligned} y(u, v) &= \sum_{j=0}^{M_1} h_1(j, u) \sum_{k=0}^{M_2} x(j, k) h_2(k, v) \\ &= \sum_{k=0}^{M_2} h_2(k, v) \sum_{j=0}^{M_1} x(j, k) h_1(j, u). \end{aligned}$$

Reeglina tähendab teisenduse faktoriseeruvus olulist võitu arvutuskiiruses. Selle väite muudab ilmseks teisenduse maatrikskuju. Kui pildivektori teisenduse $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$ maatriks \mathbf{H} on $M_1 M_2 \times N_1 N_2$ maatriks, siis pildimaatriksi faktoriseeruva teisenduse

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}_2^T \mathbf{X} \mathbf{H}_1$$

korral \mathbf{H}_1 on $M_1 \times N_1$ maatriks ning \mathbf{H}_2 on $M_2 \times N_2$ maatriks ning \mathbf{Y} on $N_1 \times N_2$ maatriks. Kui pildi suurus ei muutu, siis on mõlemad teisendusmaatriksid ruutmaatriksid.

Küllalt levinud grupi lineaarsetest teisendustest moodustavad nihkeinvariantsed teisendused, mille korral ei olene pildipunkti teisendus selle punkti asukohast pildis, vaid ainult tema mingitest naaberpunktidest. Nihkeinvariantse teisenduse saame üles kirjutada diskreetse konvolutsioonina $x * h = y$:

$$y(u, v) = \sum_{j=0}^{M_1} \sum_{k=0}^{M_2} x(j, k) h(j, u, k, v) = \sum_{j=0}^{M_1} \sum_{k=0}^{M_2} x(j, k) h(u - j, v - k).$$

Faktoriseeruv konvolutsioon on kujul

$$y(u, v) = \sum_{j=0}^{M_1} \sum_{k=0}^{M_2} x(j, k) h_1(u - j) h_2(v - k).$$

Maatrikskujul esitatud faktoriseeruva konvolutsiooni $\mathbf{Y} = \mathbf{H}_2^T \mathbf{X} \mathbf{H}_1$ maatriksid on Toeplitzi maatriksid (s.t peadigonaali ning iga sellega paralleelse digonaali kõik elemendid on võrdsed). Nihkeinvariantsed teisendused on aluseks lineaarsetele pildifiltritele, millest mitmed kasutatavamad filtrid on ka faktoriseeruvad.

Tüüpiline lineaarsete filtrite kasutusvaldkond on kontuuride leidmine. Osatuletise operaatorile vastav diskreetne faktoriseeruv teisendus (eelnevalt vaadatud Sobeli maatriks):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vastavad tsirkulantsed (iga veerg on sama vektor, nihutatud eelneva suhtes) teisendusmaatriksid on

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

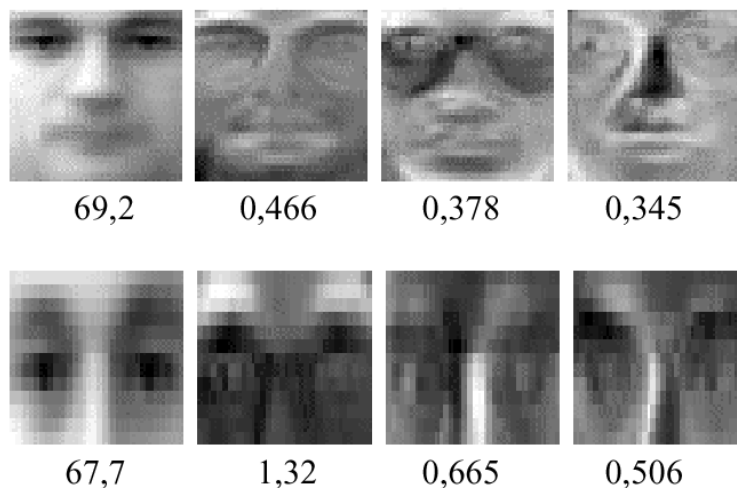
Maatriksite korrutamise, mis annab ilusa teoreetilise esituse, asemel kasutatakse praktikas reeglina otsest arvutamist. Suurte mittefaktoriseeruvate filtrimaatriksite korral sobib Fourier' teisendus, sest $\mathcal{F}(a * b) = \mathcal{F}a \mathcal{F}b$. Väikese pildimaatriksi jaoks on kiirem otsene arvutamine. $2r + 1$ küljepikkusega filtri h korral saame

$$y(u, v) = \sum_{j=-r}^r \sum_{k=-r}^r h(j, k) x(u - j, v - k).$$

Unitaarteisendused

Pilditeisenduste hulgas on eriline koht unitaarteisendustel. Lineaarne teisendus

$$\mathbf{y} = \mathbf{U} \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_2})$$



Joonis 10. Karhunen-Loeve'i teisenduse esimesed omaväärtused ja neile vastavad omavektorid (omanäod – isikutuvastus, täpsemalt [8], [23])

on unitaarne, kui \mathbf{U} on unitaarmaatriks. Unitaarmaatriks \mathbf{U} on ruutmaatriks, mille pöördmaatriks $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*$ on võrdne tema Hermite'i kaasmaatriksiga (transponeeritud kaaskompleks). Erijuhul, kui maatriksi elemendid on reaalsed, on tegemist ortogonaalse maatriksiga. Unitaarmaatriksi korral on $|\det \mathbf{U}| = 1$, lisaks on veel teisi häid omadusi.

Unitaarteisenduse oluline omadus on vektori pikkuse (pildinduses energia) säilitamine (konservatiivsus):

$$\|\mathbf{y}\| = \mathbf{y}^* \mathbf{y} = \mathbf{x}^* \mathbf{U}^* \mathbf{U} \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|.$$

Energiat võib käsitleda kui pildiinfo jaotuse määrtust. Seega, energiat säilitav teisendus säilitab ka kogu pildiinfo. Kadudega pakkimine ([11], 8.5) seisneb unitaarteisendusega maksimaalse energia kontsentratsiooni saavutamises, seejärel loobutakse vähese energiamahtuga elementidest.

Optimaalse energiakontsentratsiooni mingi pildivalimi korral an-

nab Karhunen-Loeve'i teisendus (tuntud ka kui Hotellingi teisendus ehk omavektorite teisendus, vt [11], 11.4). Pildivalimi kovariatsioonimaatriks on

$$\mathbf{R}_{xx} := E[\mathbf{x}\mathbf{x}^*],$$

kus E on keskvärtuse operatsioon. Leiame kovariatsioonimaatriksi omamaatriksi \mathbf{K} , mis on defineeritud kujul

$$\mathbf{R}_{xx}\mathbf{K} = \mathbf{K}\lambda,$$

kus omaväärtused $\lambda := \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{M_1M_2})$. Karhunen-Loeve'i teisenduseks nimetame unitaarteisendust maatriksiga $\mathbf{A} = \mathbf{K}^*$, kus \mathbf{K} veerud on järjestatud omaväärtuste kahanemise suunas. Kovariatsioonimaatriksi praktiliseks arvutamiseks mingile pildikogumile tuleks sellest kogumist võtta mingi L pildist koosnev valim $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_L$. Selle valimi elemente veeruvektoriteks võttes saame $L \times M$ maatriksi $\mathbf{S} := (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_L)$. Kovariatsioonimaatriksi saame kujul

$$\mathbf{R}_{xx} = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \mathbf{x}_\ell \mathbf{x}_\ell^* = \frac{1}{L} \mathbf{S}\mathbf{S}^*.$$

Siin $L \gg M$. Kui $L < M$, siis maatriksi \mathbf{R}_{xx} järk on väiksem nõutavast. Juhul kui $L \ll M$, võime $M \times M$ maatriksi $\mathbf{S}\mathbf{S}^*$ omaväärtusülesande asemel lahendada $L \times L$ maatriksi $\mathbf{S}^*\mathbf{S}$ omaväärtusülesande

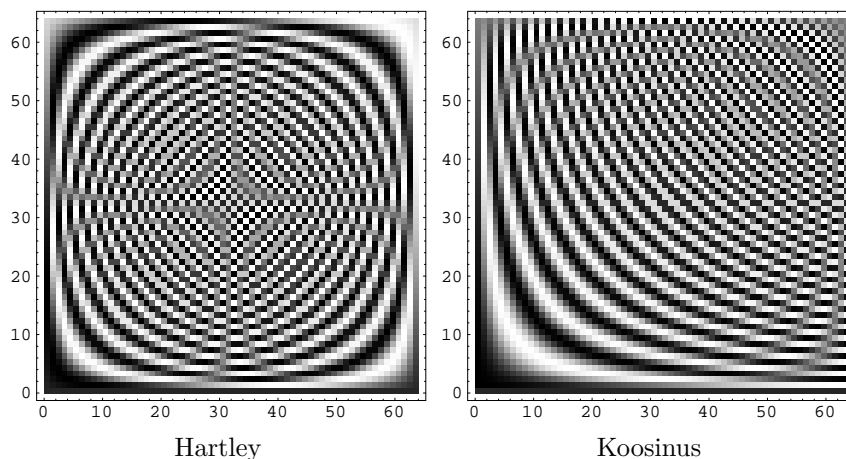
$$\mathbf{S}^*\mathbf{S}\mathbf{v}_\ell = \lambda_\ell \mathbf{v}_\ell.$$

Korrutades mõlemaid pooli vasakult maatriksiga \mathbf{S} , saame

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^*\mathbf{S}\mathbf{v}_\ell = \lambda_\ell \mathbf{S}\mathbf{v}_\ell.$$

Karhunen-Loeve'i teisendus on optimaalne:

- Annab suurima energiakontsentratsiooni esimestesse kordajatesse (vt joonis 10).
- Minimeerib L kordajast originaalpildi taastamise ruutkeskmise vea.



Joonis 11. 64×64 teisendusmaatriksid (must – positiivne, valge – negatiivne, hall – 0)

- Annab minimaalse kiirus-moonutusfunktsiooni (*rate-distortion function*) unitaarteisenduste hulgas.
- Dekorreleerib pildi Karhunen-Loeve'i ruumis.

DCT

Diskreetne koosinusteisendus on pilditöötluses eriti tähtsal kohal. Kuigi unitaarteisendustest on suurima energiakontsentratsiooniga Karhunen-Loeve'i teisendus (KLT), on see aga optimaalne ainult kindlate omadustega piltide korral. Lisaks ei ole KLT faktoriseeruv, nõudes seega üpris suurt arvutusvõimsust. Selgub, et levinud loomulike fotode korral on DCT energiakontsentratsioon lähedane KLT omale, ületades enamikku tuntud unitaarteisendusi (vt [11] lk 476). DCT on faktoriseeruv, sest (\otimes – Kroneckeri korrutis)

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \otimes \mathbf{C} \mathbf{x} \text{ on samaväärne võrrandiga } \mathbf{Y} = \mathbf{C} \mathbf{X} \mathbf{C}^T$$

ning piisab ainult kahest $N \times N$ maatriksiga (joonis 11) korrutamise asemel ühe $N^2 \times N^2$ maatriksiga korrutamise asemel (vajalik KLT korral). Tavaliselt defineeritakse DCT teisendusmaatriksi \mathbf{C} elemendid

kujul

$$c_{j,k} := a_k \cos \frac{\pi(2j+1)k}{2N}, \quad a_k := \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, & k = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & k > 0. \end{cases}$$

Olenevalt ülesandest võib kasutada ka teistsuguseid kordajaid. Koo-sinusteisendusel põhineb JPEG pildipakkimisalgoritm ([11], 8.6.2). Pilt jagatakse plokkideks (tavaliselt 8×8) ning igale plokkile raken-datakse DCT-d. Suure pakkimistiheduse korral muutub pilt seetõ-ttu ruuduliseks. Sellest puudusest on vabad lainekeste teisendustel põhinevad pildipakkimisalgoritm.

Lainekeste teisendus

Diskreetne lainekeste teisendus (vt [11] ptk 7, [9]) on defineeritud, kasutades parameetrite vektoreid \mathbf{h} , \mathbf{g} , $\tilde{\mathbf{h}}$ ning $\tilde{\mathbf{g}}$. Vektorid tekitavad vastavad tsirkulantmaatriksid (ridade nihe 2) \mathbf{H} , \mathbf{G} , $\tilde{\mathbf{H}}$ ning $\tilde{\mathbf{G}}$. Teisendusmaatriksid on kujul

$$\mathbf{T} := \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{T}} := \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}$$

Biortogonaalsuse tingimus maatriksesituses avaldub järgnevalt:

$$\mathbf{T}\tilde{\mathbf{T}}^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{H}\tilde{\mathbf{H}}^\top & \mathbf{H}\mathbf{G}^\top \\ \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{H}}^\top & \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{G}^\top \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

Klassikalisel juhul võetakse $\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{h}$ ning $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g}$, mis annab unitaar-teisenduse (nt Haari või Daubechies' lainekeste).

Praktikas on tihti kasutusel biortogonaalsed teisendused. JPEG2000 pildipakkimisalgoritm ([11], 8.6.2, [29]) põhineb just lai-nekeste teisendusel. Kadudega pakkimiseks on kasutusel Daubechies' 9/7 teisendus (s.t \mathbf{h} on 9-elementiline, $\tilde{\mathbf{h}}$ on 7-elementiline). Kadudeta teisenduseks on LeGall'i 5/3 DWT ($\tilde{\mathbf{h}}$ langeb kokku Hani valimrea tuuma s_H tekiatud vektoriga)

$$\mathbf{h} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right), \quad \tilde{\mathbf{h}} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right).$$

Kokkuvõte

Käesolevas on püütud anda lühiülevaade mõningatest pildinduse matemaatilistest aspektidest. Me näitasime, et kuigi digipildid on esitatud maatriksitena, võimaldab valimridade teooria anda mitmetele klassikalistele pildinduse valdkondadele loomuliku esituse. Lisaks ilmselt valimridade abil toimuvale piltide suurendamisele ja vähendamisele saame pildi esitusest valimreana tuletada ka mitmed tuntud lineaarsed pildifiltrid.

Pildi lineaarseid teisendusi käsitledes saame kokku võtta nii pildifiltrid kui ka unitaarteisendused. Unitarteisendustel põhinevad peamised pildi kadudega pakkimisalgoritmid.

Vaatame pildi töötlemist alates kaamerast kuni kettale salvestamiseni. Digikaamera pildisensor annab meile Bayeri valgusfiltri tõttu toorpildi, millest tavalise pildimaatriksi saamiseks tuleb rakendada pildi esitust valimreana. Reeglina pilti töödeldakse. Teravuse tõstmiseks on populaarseim ebaterava maski kasutamine. Häireid pildis saab vähendada lineaarsete filtritega (selleks sobivad siiski paremini antud ülevaatest välja jäetud mittelineaarsed filtrid) ja Fourier' teisenduse abil ruumisagedustega töötavate filtritega. Tehnilistes rakendustes on oluline kontuuride leidmine, mis on samuti teostatav lineaarsete filtritega. Saadud pildile tuleb anda meile sobivad mõõtmed, mis nõuab jällegi pildi esitust valimreana. Lõpuks peab pildi kuidagi salvestama. Selleks on ülekaalukalt levinuim JPEG-formaat, mis põhineb Fourier' koosinusteisendusel (DCT). JPEG mõningatest puudustest on vaba lainekeste teisendustel (DWT) põhinev JPEG2000 pildiformaat.

Pildindusega lähemaks tutvumiseks võiks soovitada üldiselt parimaks hinnatud ülevaadet [11]. Mitmete pildinduse valdkondade ilusat matemaatilist esitust sisaldab [13]. Samuti on küllaltki matemaatiline käsitlus [19]. Peaaegu matemaatikavabaks on üritatud teha pildiraamat [20], mida on matemaatilist tausta tundes teinekord hea lehitseda.

Paljud pilditöötlusmeetodid on realiseeritud pluginatena vabavaralisele pilditöötlusprogrammile⁷ *ImageJ*, mille kohta võib leida

⁷<http://rsb.info.nih.gov/ij/>, pluginad .../ij/plugins/index.html

rohkem infot artiklist [21]. Russi raamatu [20] lisaks olevat *Photoshopi* pluginavalikut IPTK sai eelnevas mainitud. Ise saab *Photoshopi* pluginaid kirjutada näiteks vabavaralise pluginaga⁸ *Filter Meister*.

Kirjandus

1. J. J. Benedetto, *Harmonic Analysis and Applications*. CRC Press, New York, 1996.
2. É. Borel, Mémoire sur les Séries Divergentes. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure: Série 3*, **16** (1899), 9–131.
3. R. N. Bracewell, *Fourier Analysis and Imaging*. Kluwer, New York, 2003.
4. R. N. Bracewell, *The Hartley Transform*. Oxford Univ. Press, New York, 1986.
5. P. L. Butzer and R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation* (vol. 1). Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart, 1971.
6. P. L. Butzer, W. Engels, S. Ries and R. L. Stens, The Shannon sampling series and the reconstruction of signals in terms of linear, quadratic and cubic splines. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **46** (1986), 299–323.
7. P. L. Butzer, W. Splettstößer, and R. L. Stens, The sampling theorems and linear prediction in signal analysis. *Jahresber. Deutsch. Math-Verein*, **90** (1988), 1–70.
8. T. E. Campos, R. Schmidt Feris, R. M. Cesar, Eigenfaces versus eigeneyes: first steps toward performance assessment of representations for face recognition, *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, vol. 1793, pp. 197–206, Springer, 2000.
<http://www.vision.ime.usp.br/~creativision/absmic78.html>

⁸<http://www.filtermeister.com/>, autonoomse pluginaga tekitamine tasuline

9. A. Cohen, R. D. Ryan, *Wavelets and Multiscale Signal Processing*. Chapman & Hall, 1995.
10. F. J. Harris, On the use of windows for harmonic analysis. *Proc. of the IEEE*, **66** (1978), 51–83.
11. R. C. Gonzalez, R. E. Woods, *Digital Image Processing*. Second Edition, Prentice-Hall, 2002.
12. J. R. Higgins, *Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1996.
13. B. Jähne, *Digital Image Processing: Concepts, Algorithms, and Scientific Applications*. 4th Edition, Springer-Verlag, 1997.
14. B. Jähne, *Spatio-Temporal Image Processing. Theory and Scientific Applications*. Second Edition, Springer-Verlag, 1993.
15. A. Kivnukk and G. Tamberg, On sampling operators defined by the Hann window and some of their extensions. *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, **2** (2003), 235–258.
16. G. Ling, K. Sun-Yuan, J. Larsen, eds. *Multimedia Image and Video Processing* CRC Press, 2001.
17. E. Meijering, A chronology of interpolation: from ancient astronomy to modern signal and image processing. *Proceedings of the IEEE*, **90**(3) (2002), 319–342. <http://imagescience.bigr.nl/meijering/publications/abstracts/pieee2002.html>
18. E. Meijering et al., Quantitative comparison of sinc-approximating kernels for medical image interpolation. In: *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention — MICCAI 1999*, (C.Taylor and A.Colchester, eds.), vol. 1679 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Berlin, 1999, pp.210–217. <http://imagescience.bigr.nl/meijering/publications/abstracts/miccai1999.html>
19. W. K. Pratt, *Digital Image Processing*. Third Edition, John Wiley & Sons, 2001.

20. J. C. Russ, *The image processing handbook*. Third Edition, CRC, 1999.
21. D. Sage, M. Unser, Teaching image-processing programming in Java. *IEEE Signal Processing Magazine*, **20**(6) (2003), 43–52. <http://bigwww.epfl.ch/publications/sage0303.html>
22. S. J. Sangwine, R. E. N. Horn, eds. *The Colour Image Processing Handbook*. Chapman & Hall, 1998.
23. L. Sirovich and M. Kirby, Low-dimensional procedure for the characterization of human faces, *Journal of the Optical Society of America*. (4), pp. 519–524, 1987. <http://camelot.mssm.edu/publications/larry/ld.pdf>
24. R. L. Stens, Sampling by generalized kernels. In: *Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis: Advanced Topics*, (J. R. Higgins and R. L. Stens, eds.), Clarendon Press, Oxford, 1999, pp. 130–157.
25. G. Tamberg, Approximation by the Blackman-type sampling series. In: *Proc. of the Intern. Workshop on Sampling Theory and Applications (SampTA '03), Strobl, Salzburg, Austria, May 26–31, 2003*, pp. 90–94.
26. P. Thévenaz, T. Blu, M. Unser, Interpolation revisited. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **19**(7) (2000), 739–758. <http://bigwww.epfl.ch/publications/thevenaz0002.html>
27. K. Turkowski, Filters for common resampling tasks. In: *Graphics Gems I*, A. S. Glassner, ed., Academic Press, 1990, pp. 147–165. <http://www.worldserver.com/turk/computergraphics/ResamplingFilters.pdf>
28. M. Unser, Splines. A perfect fit for signal and image processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, **16** (1999), 22–38. <http://bigwww.epfl.ch/publications/unser9902.html>

29. M. Unser, T. Blu, Mathematical properties of the JPEG2000 wavelet filters. *IEEE Transactions on Image Processing*, **12**(9) (2003), 1080–1090.
<http://bigwww.epfl.ch/publications/unser0305.html>